Curso de Doctorado:
Lenguajes Integrados Multiparadigma

Pascual Julián Iranzo

Pascual.Julian@uclm.es

Universidad de Castilla – La Mancha

Departamento de Informática

Ciudad Real (España)

Indice

Motivación y Objetivos

- Hemos estudiado la lógica ecuacional como fundamentación de la programación funcional (aproximación algebraica).
- Un conjunto de ecuaciones podía asimilarse a un programa y el problema de la validez a un proceso de reducción (sintáctico):
  - La ecuación $s \approx t$ es valida si el s puede transformase en t (o ambos "convergen" a un mismo término).

Motivación y Objetivos

- **Ejemplo** (Axiomas de Grupo): Dado un conjunto de ecuaciones, $\mathcal{E}$,

$$\begin{array}{lclcl} X + 0 = X & (e_1) & -X + X = 0 & & (e_3) \\ 0 + X = X & (e_2) & X + (Y + Z) = (X + Y) + Z & & (e_4) \end{array}$$

comprobamos que $\mathcal{E} \vdash -(-X) \approx X$, reduciendo $-(-X)$ a X

$$\begin{array}{rcl} -(-X) & \approx & -(-X) + 0 \approx -(-X) + (-X + X) \\ & \approx & (-(-X) + -X) + X \approx 0 + X \approx X \end{array}$$

Motivación y Objetivos

- Para efectuar una reducción, en cada paso deben tomarse ciertas decisiones y precauciones:
  - Elegir el axioma ecuacional apropiado y usarlo en el sentido adecuado.
  - Encontar la sustitución justa.
  - Elegir el camino adecuado para evitar reducciones infinitas.

Motivación y Objetivos

- Respecto a evitar reducciones infinitas, que las ecuaciones puedan emplearse en ambos sentidos es una desventaja:
  - En la anterior reducción se podría haber procedido así:

$$\begin{array}{rcccc} -(-X) & \approx & -(-X)+0 & \approx & -(-X) \\ & \approx & -(-X)+0 & \approx & -(-X) \ \ldots \end{array}$$

Motivación y Objetivos

- Una forma de resolver el problema es utilizar las ecuaciones como ecuaciones orientadas (e.g., de izquierda a derecha).

- Esto nos lleva al concepto de sistema de reescritura de términos.

$$
\begin{array}{llrl}
X + 0 \rightarrow X & (R_1) & -X + X \rightarrow 0 & (R_3) \\
0 + X \rightarrow X & (R_2) & X + (Y + Z) \rightarrow (X + Y) + Z & (R_4)
\end{array}
$$

Motivación y Objetivos

- Sin embargo, para el problema que nos ocupa, esta manipulación no es suficiente:
  - El término $--X$ no puede reducirse a X (o viceversa)
  - Tampoco pueden reducirse a un mismo término.
- Los términos $--X$ y X son formas irreducibles (formas normales) distintas.

Motivación y Objetivos

- Habíamos probado que $--X \approx X$.
  - Pero hemos sido incapaces de probar la identidad de $--X$ y X usando reglas de reescritura.

- **Problema**: El sistema de reglas generado no es capaz de reproducir las propiedades del sistema de ecuaciones original.

Motivación y Objetivos

- Para que la reescritura sea una herramienta útil debemos construir sistemas reglas (a partie de un sistema de ecuaciones $\mathcal{E}$) con las siguientes propiedades:
  - Los términos tengan una única forma normal.

Motivación y Objetivos

- Para que la reescritura sea una herramienta útil debemos construir sistemas reglas (a partie de un sistema de ecuaciones $\mathcal{E}$) con las siguientes propiedades:
  - Los términos tengan una única forma normal.
  - Las cadenas de reducción no sean infinitas.

Motivación y Objetivos

- Para que la reescritura sea una herramienta útil debemos construir sistemas reglas (a partie de un sistema de ecuaciones $\mathcal{E}$) con las siguientes propiedades:
  - Los términos tengan una única forma normal.
  - Las cadenas de reducción no sean infinitas.
  - El sistema sea correcto y completo para $\mathcal{E}$.

Motivación y Objetivos

- **Observación**: Es posible completar el sistema de reglas de nuestro ejemplo para que cumpla estas propiedades.
- **Conclusión**: Los sistemas de reescritura de términos puden ser útiles para la mecanización del razonamiento ecuacional.

Motivación y Objetivos

- **Objetivo**: Estudiar los sistemas de reescritura de términos y algunas de sus propiedades más importantes (que aseguren la correción y completitud con respecto al cálculo original).
- Estudiaremos principalmente:
  - Confluencia.
  - Terminación.
  - Estrategias de reescritura.

Sistemas de Reducción Abstractos

- Ciertas propiedades básicas de los sistemas de reescritura de términos pueden estudiarse de forma abstracta, independientemente de la estructura de las expresiones involucradas.
- Un sistema de reducción abstracto es un par $\langle A, \rightarrow \rangle$ donde:

1. A es un conjunto y
2. $\rightarrow$ una relación binaria sobre A (relación de reducción).

Sistemas de Reducción Abstractos

- **Ejemplo**: Sea el conjunto $A = \{a, b, c, d\}$. Podemos definir la relación $\rightarrow = \{\langle b, a\rangle, \langle b, c\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, d\rangle\}$

$$\begin{tikzcd} a & b \arrow[l] \arrow[r, bend left] & c \arrow[l, bend left] \arrow[r] & d \end{tikzcd}$$

- **Notación**: escribimos $a \rightarrow b$ en lugar de $\langle a, b\rangle \in \rightarrow$.

Sistemas de Reducción Abstractos

- Una secuencia de reducción finita (de longitud n) es una secuencia $a_0, a_2, \ldots, a_n$ de $n+1$ elementos de A tal que, para todo $1 \leq i \leq n$, $a_i \ \rightarrow \ a_{i+1}$.
- **Notación**: $a_0 \longrightarrow a_2 \longrightarrow \ldots \longrightarrow a_n$.
- Se dice que a_n es un reducto de a_0.
- $a_i \ \rightarrow \ a_{i+1}$ es un paso de reducción.
- **Ejemplo**: $b \longrightarrow c \longrightarrow b \longrightarrow a$.

Sistemas de Reducción Abstractos

- **Definiciones y Notaciones**:
  - (Identidad) $\rightarrow^0 \; = \; \{\langle x, x\rangle \mid x \in A\}$.
  - (potencia $i+1$) $\rightarrow^{i+1} \; = \; \rightarrow \circ \rightarrow^i$.
  - (cierre reflexivo) $\rightarrow^= \; = \; \rightarrow \cup \rightarrow^0$.
  - (cierre transitivo) $\rightarrow^+ \; = \; \bigcup_{i>0} \rightarrow^i$.
  - (cierre reflexivo y transitivo) $\rightarrow^* \; = \; \rightarrow^+ \cup \rightarrow^0$.

Sistemas de Reducción Abstractos

- **Definiciones y Notaciones**:
  - (Inversa) $\leftarrow \;\equiv\; \rightarrow^{-1} \;=\; \{\langle y, x\rangle \mid x \rightarrow y\}$.
  - (cierre simétrico) $\leftrightarrow \;=\; \rightarrow \,\cup\, \leftarrow$.
  - (cierre simétrico transitivo) $\stackrel{+}{\leftrightarrow} \;=\; (\leftrightarrow)^{+}$.
  - (cierre simétrico reflexivo y transitivo) $\stackrel{*}{\leftrightarrow} \;=\; (\leftrightarrow)^{*}$.

Sistemas de Reducción Abstractos

- **Nomenclatura**: $\overset{*}{\leftrightarrow}$ se denomina relación de convertibilidad.
- **Ejercicio**: Hallar $\rightarrow^0$, $\rightarrow^3$, $\rightarrow^=$, $\rightarrow^+$ y $\rightarrow^*$ para el SRA de la página 14.
- **Ejercicio**: Mostrar que $\overset{*}{\leftrightarrow}$ es la menor relación de equivalencia que contiene a $\rightarrow$.

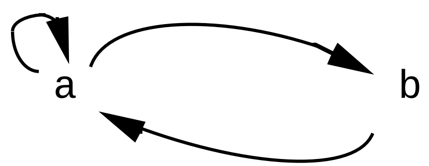
Sistemas de Reducción Abstractos

- **Definiciones y Notaciones**:
  - a es reducible sii existe un b tal que $a \to b$.
  - c está forma normal (es ireducible) sii no es reducible.
  - c es una forma normal de a sii $a \to^* c$ y c es irreducible.
  - a y b son *joinables* (denotado $a \downarrow b$) sii existe un c tal que $a \to^* c \; {}^*\!\leftarrow b$.

Sistemas de Reducción Abstractos

- **Ejemplo**: Dado el SRA de la página 14, a y d son formas normales. Ambos elementos son reductos de b o c.

- **Ejemplo**: Sea el conjunto $A = \{a, b, \}$. Podemos definir la relación $\rightarrow = \{\langle a, a\rangle, \langle a, b\rangle, \langle b, a\rangle\}$

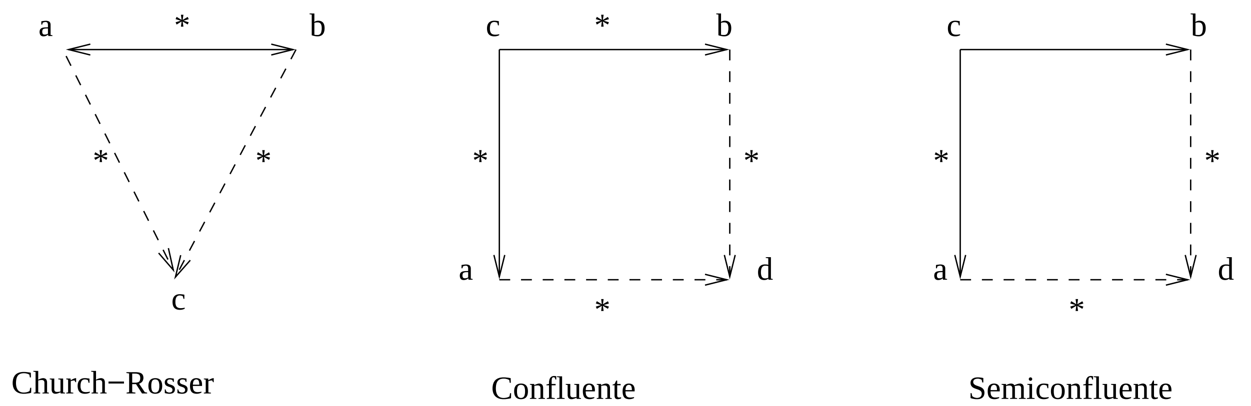


Este SRA no contiene formas normales, pero a y b son *joinables*.

Sistemas de Reducción Abstractos

- **Definiciones y Notaciones**: Una relación de reducción, $\rightarrow$, se dice que
  - es Church–Rosser sii $(\forall a, b)(a \stackrel{*}{\leftrightarrow} b \ \Rightarrow \ a \downarrow b)$.
  - es confluente sii $(\forall a, b, c)(a \ {}^{*}\!\!\leftarrow c \rightarrow^{*} b \ \Rightarrow \ a \downarrow b)$.
  - es semiconfluente sii $(\forall a, b, c)(a \leftarrow c \rightarrow^{*} b \ \Rightarrow \ a \downarrow b)$.
- Un SRA $\langle A, \rightarrow \rangle$ es confluente si $\rightarrow$ es confluente (Idem. resto de propiedades).

Sistemas de Reducción Abstractos



- Las líneas continuas expresan cuantificación universal; las discontinuas existencial.
- **Ejercicio**: Comprobar que el SRA de la página 14 no es confluente.

Sistemas de Reducción Abstractos

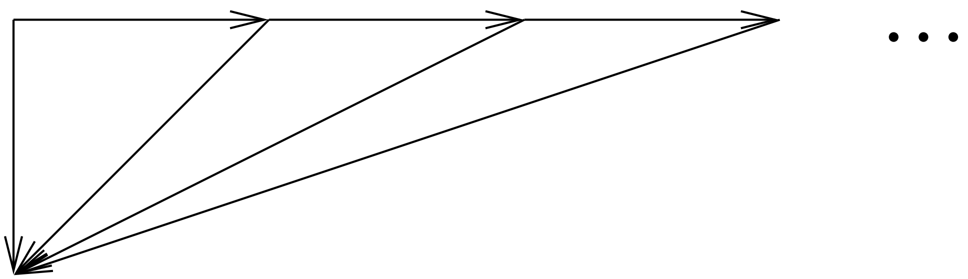
- **Definiciones y Notaciones**: Una relación de reducción, $\rightarrow$, se dice que
  - es terminante (o noetheriana) sii no existen secuencias de reducción infinitas.
  - es normalizante sii todo elemento tiene una forma normal.
  - es canónico (o convergente) sii es confluente y terminante.

Sistemas de Reducción Abstractos

- **Ejemplo**: ninguno de los SRA analizados hasta ahora es terminante.
- **Ejemplo**: El conjunto (estríctamente) ordenado $\langle \mathbb{N}, < \rangle$, visto como SRA, es terminante.
- **Observación**: Relación terminante equivale a relación bien fundada. Por consiguiente, sobre un SRA terminante puede aplicarse el principio de inducción completo (o principio de inducción noetheriano).

Sistemas de Reducción Abstractos

- Toda relación terminante es normalizante (¿por qué?). Lo contrario no es cierto.
- **Ejemplo**: La siguiente relación es normalizante pero no es terminante.



Sistemas de Reducción Abstractos: Resultados sobre confluencia

- **Proposición**: Sea una relación $\rightarrow \subseteq A \times A$ confluente. Si $a \in A$ tiene una forma normal, ésta es única.
- **Ejercicio**: demostrar por reducción al absurdo.
- **Observación**: La confluencia permite la implementación determinista de los cómputos, ya que, cualquiera que sea la secuencia de reducción que sigamos, computaremos la misma (única) forma normal.

Sistemas de Reducción Abstractos: Resultados sobre confluencia

- **Teorema**: Si $\rightarrow$ es una relación de reducción, las siguientes proposiciones son equivalentes:

1. $\rightarrow$ tiene la propiedad de Church–Rosser.
2. $\rightarrow$ es confluente.
3. $\rightarrow$ es semiconfluente.

Sistemas de Reducción Abstractos: Resultados sobre confluencia

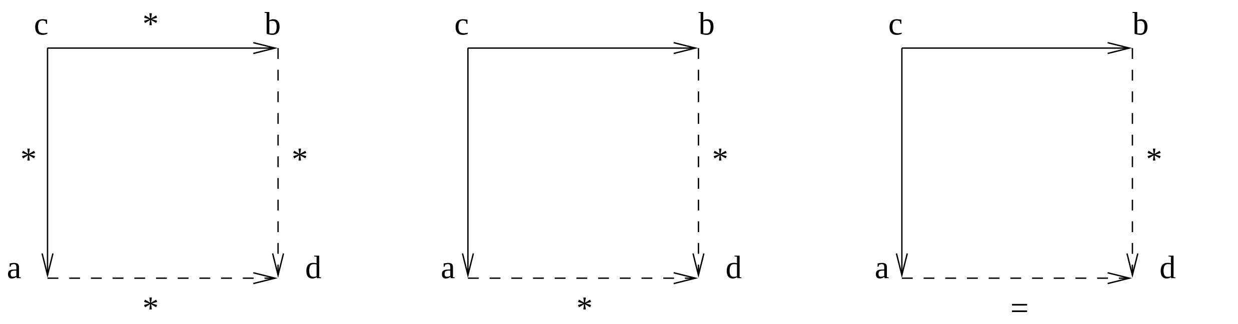
- **Observación**: Para comprobar que un SRA es confluente hay que estudiar puntos “divergentes” de longitud arbitraria (i.e., $a \ {}^{*}\!\!\leftarrow c \rightarrow^{*} b$). Este es un problema difícil.

- **Solución**: localizar la confluencia estudiar puntos “divergentes” de un paso de longitud (i.e., $a \leftarrow c \rightarrow b$).

Sistemas de Reducción Abstractos: Resultados sobre confluencia

- **Definiciones y Notaciones**: Una relación de reducción, $\rightarrow$, se dice que
  - es localmente confluente sii $(\forall a, b, c)(a \leftarrow c \rightarrow b \;\;\Rightarrow\;\; a \downarrow b)$.
  - es fuertemente confluente sii $(\forall a, b, c)(a \leftarrow c \rightarrow b \;\;\Rightarrow\;\; (\exists d)\; a \rightarrow^{=} d \;{}^{*}\!\!\leftarrow b)$.

Sistemas de Reducción Abstractos: Resultados sobre confluencia



Confluente

Localmente confluente

Fuertemente confluente

- **Proposición**: Toda relación fuertemente confluente es confluente.
- **Proposición** [Lema de Newman]: Una relación terminante y localmente confluente es confluente.

Sistemas de Reducción Abstractos: Convergencia

- **Proposición**: Si $\to$ es convergente, $a \overset{*}{\leftrightarrow} b$ sii $a\downarrow = b\downarrow$.
- **Observación**: Este resultado proporciona un test para la equivalencia de dos elementos a y b:

1. Reducir a y b hasta alcanzar su forma normal $a\downarrow$ y $b\downarrow$.
2. comprobar que $a\downarrow$ y $b\downarrow$ son iguales.

- **Observación**: Si $\overset{*}{\leftrightarrow}$ coincide con $\approx_{\mathcal{E}}$ tendremos un mecanismo de decisión para el problema de la validez.

Sistemas de reescritura de términos y relación de reescritura

- Una regla de reescritura es un par ordenado $\langle l, r\rangle$, escrito $l \to r$, donde

1. $l, r \in \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$,
2. $l \notin \mathcal{X}$ y
3. $\mathcal{V}ar(r) \subseteq \mathcal{V}ar(l)$.

- l se denomina la parte izquierda (lhs) y r la parte derecha (rhs).

Sistemas de reescritura de términos y relación de reescritura

- **Ejemplo**: reglas de reescritura válidas:

$$if(True, x, y) \rightarrow x$$

$$from(x) \rightarrow x : from(S(x))$$

$$first(S(x), y : z) \rightarrow y : first(x, z)$$

Sistemas de reescritura de términos y relación de reescritura

- **Ejemplo**: expresiones que no son reglas de reescritura:

$g(x,y) \longrightarrow f(g,b)$	La rhs no es un término
$x \longrightarrow f(x)$	La parte izquierda es una variable
$f(x) \longrightarrow y$	No se cumple la condición 3

Sistemas de reescritura de términos y relación de reescritura

- Si no se cumple la condición 3, decimos que $l \to r$ es una regla de reescritura con variables extra.
- Un Sistema de Reescritura de Términos (TRS) es un par $\mathcal{R} = \langle \mathcal{F}, R \rangle$ donde R es un conjunto finito de reglas de reescritura.
- La noción estándar de TRS prohíbe la presencia de reglas de reescritura con variables extra.

Sistemas de reescritura de términos y relación de reescritura

- **Ejemplo** de TRS:

$$
\begin{array}{ll}
R_1 : if(True, x, y) \to x & R_5 : and(True, x) \to x \\
R_2 : if(False, x, y) \to y & R_6 : and(False, y) \to False \\
R_3 : Cero + x \to x & \\
R_4 : S(x) + y \to S(x + y) &
\end{array}
$$

- Muchas veces identificaremos el TRS $\mathcal{R}$ con el conjunto de reglas R.

Sistemas de reescritura de términos y relación de reescritura

- **Convenciones y notaciones**:
  - $L(\mathcal{R})$: El conjunto de las partes izquierdas de un TRS.
  - Toda instancia $\sigma(l)$ de una lhs $l \in L(\mathcal{R})$ de una regla es un redex.
  - $\mathcal{P}os_{\mathcal{R}}(t)$: El conjunto de posiciones de redexes en un término t.

Sistemas de reescritura de términos y relación de reescritura

- Las reglas de reescritura de un TRS inducen una relación de reducción $\rightarrow$ entre los términos.
- [Relación de Reescritura]
  Un término t se reescribe al término s (en la posición p), escrito $t \rightarrow_{\mathcal{R} p,\alpha} s$, si

1. existe una posición $p \in \mathcal{P}os(t)$,
2. una regla de reescritura $\alpha : l \rightarrow r$ y
3. una substitución σ con $t|_p = \sigma(l)$ y $s = t[\sigma(r)]_p$.

Sistemas de reescritura de términos y relación de reescritura

- Decimos que $t|_p$ es el redex de t que se ha contraído (o reducido) y que $\sigma(r)$ es su contracto.
- **Observación**: Escribiremos $t{\rightarrow_{p,\alpha}}s$, $t \rightarrow_p s$ o $t \rightarrow s$ cuando no sea necesario especificar el TRS $\mathcal{R}$, la regla y/o la posición.
- El par $\langle \mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X}), \rightarrow_{\mathcal{R}} \rangle$ es el sistema de reducción abstracto asociado al TRS $\mathcal{R}$.

Sistemas de reescritura de términos y relación de reescritura

- **Ejercicio**: Para el TRS de la página 36, calcular los distintos pasos de reescritura que pueden darse con el término $t = if(and(True, False), Cero + S(Cero), Cero)$.

- **Ejercicio**: Dados los términos $t \equiv f(h(h(a)), h(x))$ y $s \equiv f(h(h(a)), h(a))$ y el TRS

$$R_1 : h(h(x)) \to h(x) \quad R_2 : h(a) \to a \quad R_3 : f(x, x) \to x$$

Obtener todas las secuencias de reescritura a partir de t y s.

Relación de reescritura y problema de la validez

- **Proposición**: Sea el TRS $\mathcal{R} = \langle \mathcal{F}, R \rangle$, la relación $\rightarrow_{\mathcal{R}}$ es la mínima relación en $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ que:

1. $R \subset \rightarrow_{\mathcal{R}}$

   [$\rightarrow_{\mathcal{R}}$ contiene a R, i.e., $(l \rightarrow r) \in R \;\Rightarrow\; l \rightarrow_{\mathcal{R}} r$];

2. $(\forall s, t \in \mathcal{T})(\forall f \in \mathcal{F})(s \rightarrow_{\mathcal{R}} t \Rightarrow f(., s, .) \rightarrow_{\mathcal{R}} f(., t, .))$

   [Compatible bajo las operaciones de $\mathcal{F}$];

3. $(\forall s, t \in \mathcal{T})(\forall \sigma)(s \rightarrow_{\mathcal{R}} t \;\Rightarrow\; \sigma(s) \rightarrow_{\mathcal{R}} \sigma(t))$

   [Estable bajo sustituciones];

Relación de reescritura y problema de la validez

- Una relación binaria $\rightarrow$ sobre $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ es estable bajo las operaciones de $\mathcal{F}$ sii

  $$(\forall f \in \mathcal{F})(\forall s_i, \ldots, s_n, t_1, \ldots, t_n \in \mathcal{T})$$
  $$[s_1 \rightarrow t_1 \wedge \ldots \wedge s_n \rightarrow t_n \quad \Rightarrow \quad f(\overline{s_n}) \rightarrow f(\overline{t_n})].$$

- **Lema**: Sea una relación binaria $\rightarrow$ sobre $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$, reflexiva y transitiva. Entonces, $\rightarrow$ es estable bajo las operaciones de $\mathcal{F}$ sii es compatible bajo las operaciones de $\mathcal{F}$.

Relación de reescritura y problema de la validez

- **Teorema**: Sea $\mathcal{R}$ un TRS. $\stackrel{*}{\leftrightarrow}_{\mathcal{R}}$ es la mínima congruencia sobre $\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{X})$ que contiene a $\mathcal{R}$ y es estable bajo substituciones.
- **Corolario**: Sea $\mathcal{E}$ un conjunto de ecuaciones y $\mathcal{R}$ el TRS que resulta de orientan (convenientemente) las ecuaciones de $\mathcal{E}$.

$$(\forall s, t \in \mathcal{T})(s \stackrel{*}{\leftrightarrow}_{\mathcal{R}} t \Leftrightarrow \mathcal{E} \vdash s \approx t)$$

- Por tanto, se cumple que $\stackrel{*}{\leftrightarrow}_{\mathcal{R}}$ es equivalente a $\approx_{\mathcal{E}}$.

Relación de reescritura y problema de la validez

- El teorema anterior junto a las observaciones de la página 31 proporcionan un procedimiento de decisión para el problema de la validez cuando trabajamos con TRS convergentes.
- Este resultado justifica la importancia de las propiedades de terminación y confluencia y la necesidad de una mejor caracterización en el ámbito de los TRSs.

Clases de Sistemas de Reescritura.

- Dadas dos reglas $\alpha_1 : l_1 \to r_1$ y $\alpha_2 : l_2 \to r_2$ para las que existe una posición $p \in \mathcal{FP}os(l_1)$ tal que $l_1|_p$ y l_2 unifican con mgu σ, entonces el par de reductos $\langle \sigma(r_1), \sigma(l_1)[\sigma(r_2)]_p \rangle$ es un par crítico.
- α_1 y α_2 no comparten variables, para lo que pueden ser renombradas si es preciso.
- Excluimos el caso trivial $\alpha_1 = \alpha_2$ y cuando $p = \Lambda$.

Clases de Sistemas de Reescritura.

- Un par crítico $\langle t, s\rangle$, con $t = \sigma(r_1)$ y $s = \sigma(l_1)[\sigma(r_2)]_p$
  - es un cubrimiento (*overlay*) si $p = \Lambda$;
  - es trivial si $t \equiv s$;
  - es convergente si $t \downarrow s$.
- **Ejemplo**: El TRS $\{g(B, a) \to B, \;\; a \to B\}$ tiene un par crítico $\langle g(B, a)[B]_2, B\rangle = \langle g(B, B), B\rangle$ que no es convergente.

Clases de Sistemas de Reescritura.

- **Ejemplo**: El TRS

$$\{g(B,a) \to B,\ a \to B,\ g(B,B) \to B\}$$

  tiene un único par crítico $\langle g(B,a)[B]_2, B\rangle = \langle g(B,B), B\rangle$ que es convergente.

- Un TRS es lineal por la izquierda si para toda $l \in L(\mathcal{R})$, l es un término lineal (i.e., sin variables repetidas).

Clases de Sistemas de Reescritura.

- Un TRS $\mathcal{R}$ se dice ortogonal si es

1. Lineal por la izquierda.
2. $\mathcal{R}$ no contiene pares críticos [(fuertemente) no ambiguo]

- También se dice que las lhs de las reglas de $\mathcal{R}$ no solapan.

Clases de Sistemas de Reescritura.

- Un TRS $\mathcal{R}$ se dice ortogonal si es
1. Lineal por la izquierda.
2. $\mathcal{R}$ no contiene pares críticos [(fuertemente) no ambiguo]

- La ausencia de pares críticos en un sistema ortogonal tiene un significado muy intuitivo en términos del concepto de patrón de una regla.

Clases de Sistemas de Reescritura.

- Un TRS $\mathcal{R}$ se dice ortogonal si es

1. Lineal por la izquierda.
2. $\mathcal{R}$ no contiene pares críticos [(fuertemente) no ambiguo]

- Un patrón de una regla es una lhs en la que las variables se han sustituido por “huecos” ($\square$).

- **Ejemplo**: El patrón de la regla $and(True, x) \to x$ es: $and(True, \square)$

Sistemas de reescritura de términos

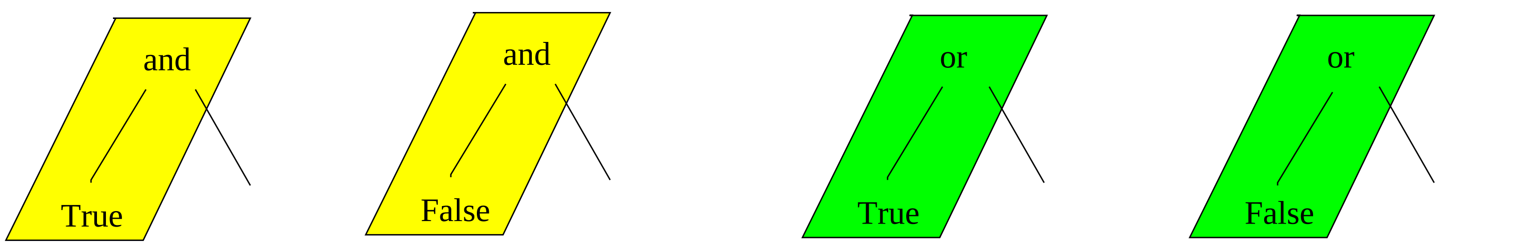
Clases de Sistemas de Reescritura.

- **Ejemplo**: El siguiente TRS es ortogonal:

$$R_1 : and(True, x) \rightarrow x; \qquad R_3 : or(true, x) \rightarrow true$$

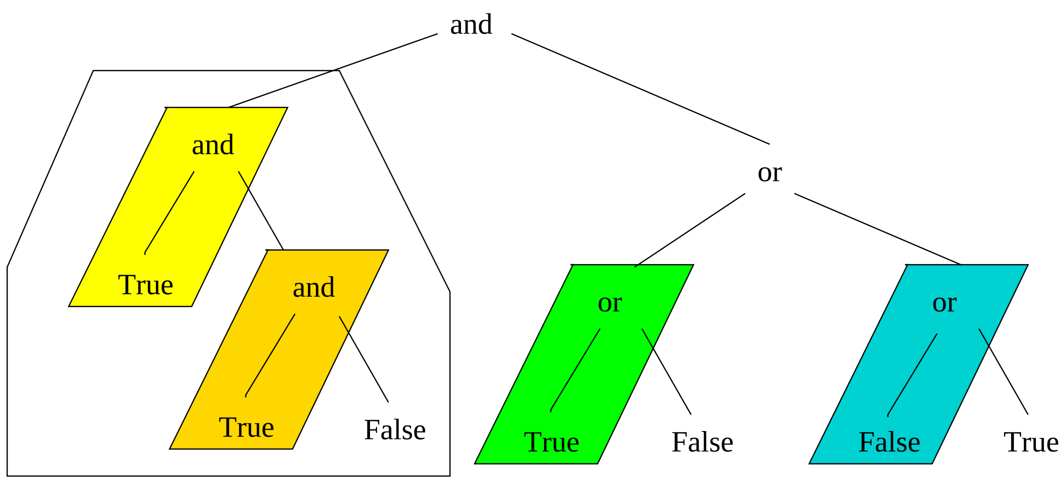
$$R_2 : and(False, x) \rightarrow False; \qquad R_4 : or(true, x) \rightarrow true$$

- Es lineal por la izquierda y los patrones de las reglas no solapan:



Clases de Sistemas de Reescritura.

- En un TRS ortogonal, los patrones de las reglas que aparecen en un término no solapan (a pesar de que algunos redexes puedan solapar).
- **Ejemplo**:

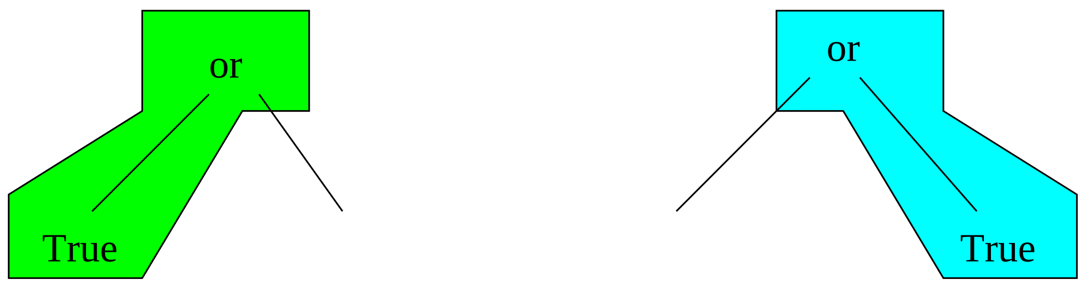


Clases de Sistemas de Reescritura.

- **Ejemplo**: El siguiente TRS no es ortogonal.

$$R_1 : or(True, x) \rightarrow True; \qquad R_2 : or(x, True) \rightarrow True;$$
$$R_3 : or(False, False) \rightarrow False$$

- Los patrones de las reglas R_1 y R_2 solapan:

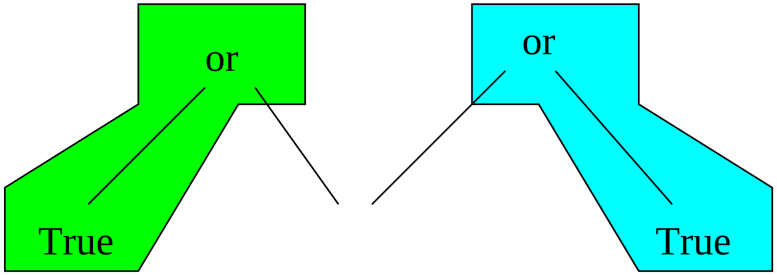


Clases de Sistemas de Reescritura.

- **Ejemplo**: El siguiente TRS no es ortogonal.

$$R_1 : or(True, x) \to True; \quad R_2 : or(x, True) \to True;$$
$$R_3 : or(False, False) \to False$$

- Los patrones de las reglas R_1 y R_2 solapan:

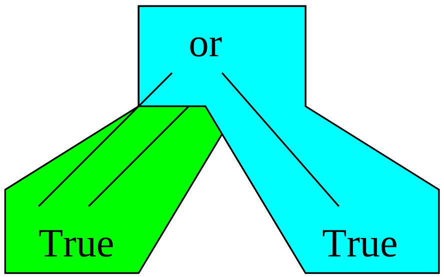


Clases de Sistemas de Reescritura.

- **Ejemplo**: El siguiente TRS no es ortogonal.

$$R_1 : or(True, x) \to True; \qquad R_2 : or(x, True) \to True;$$
$$R_3 : or(False, False) \to False$$

- Los patrones de las reglas R_1 y R_2 solapan:



Clases de Sistemas de Reescritura.

- En un TRS ortogonal tiene sentido en concepto de descendiente (o residuo) de un redex.
- El conjunto $v \backslash A$ de descendientes del redex $t|_v$ a través de $A : t \rightarrow_{[u,\alpha]} s$ es un subconjunto de $\mathcal{P}os(s)$ definido como sigue:

$$v \backslash A = \begin{cases} \emptyset & \texttt{si } v = u \\ \{v\} & \texttt{si } (v \parallel u \ \vee \ v < u) \\ \{u.w_1.v_1 \mid r|_{w_1} = x\} & \texttt{si } (v = u.w.v_1 \wedge l|_w = x \in \mathcal{X} \end{cases}$$

Clases de Sistemas de Reescritura.

- Intuitivamente, el concepto de descendiente puede entenderse como sigue:

1. marcamos la raíz del redex $t|_v$;
2. damos el paso $t \rightarrow_{[u,\alpha]} s$ para obtener s (manteniendo las marcas introducidas);
3. Las posiciones p (respec., los términos $t|_p$) que aparecen marcadas (marcados en su raíz) en el término s son las (los) descendientes de v ($t|_v$).

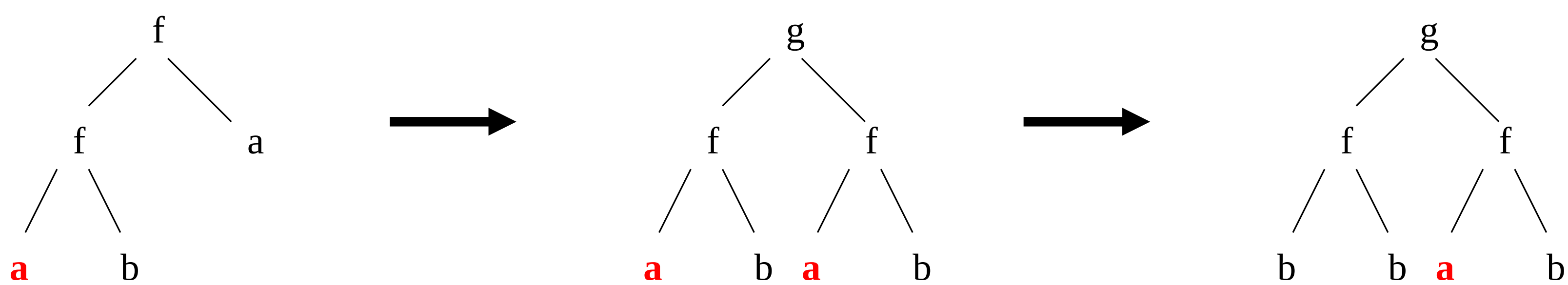
Sistemas de reescritura de términos

Clases de Sistemas de Reescritura.

- **Ejemplo**: dado el TRS

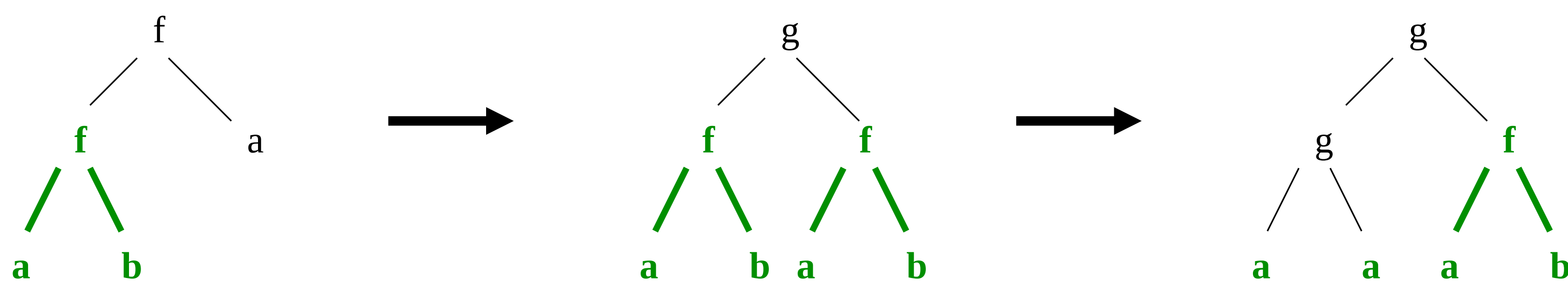
$$\{R_1 : f(x,y) \rightarrow g(x,x); \quad R_2 : a \rightarrow b\},$$

la figura muestra los descendientes del redex a en la posición 1.1 para la derivación.



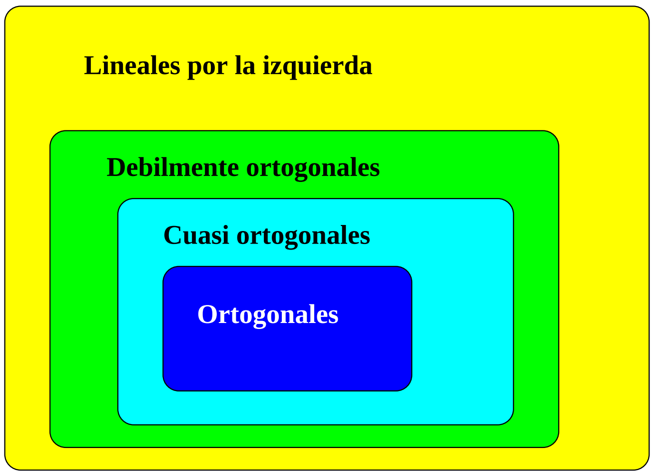
Clases de Sistemas de Reescritura.

- Los TRSs ortogonales tienen la propiedad de que los descendientes de un redex continuan siendo redexes.



Clases de Sistemas de Reescritura.

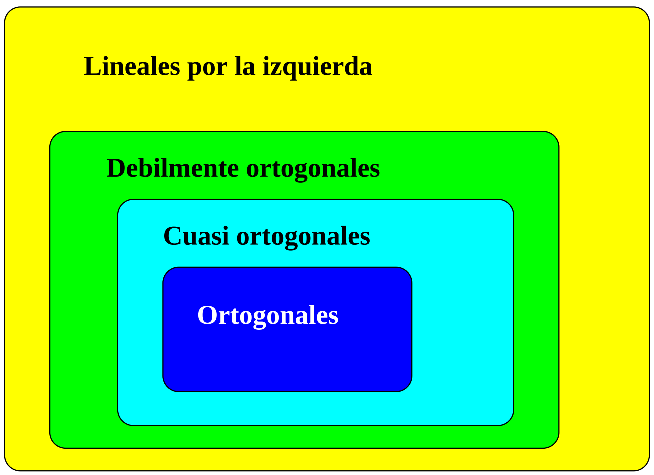
- La condición de no ambigüedad (fuerte) puede relajarse para dar lugar a clases, sucesivamente más amplias, de TRSs.



- Un SRT lineal por la izquierda cu- yos pares críticos son cubrimien- tos triviales, se denomina cuas ortogonal (*almost orthogonal*.

Clases de Sistemas de Reescritura.

- La condición de no ambigüedad (fuerte) puede relajarse para dar lugar a clases, sucesivamente más amplias, de TRSs.



- Si un TRS sólo tiene pares críticos triviales se denomina débilmente ortogonal (*weakly orthogonal*).

Clases de Sistemas de Reescritura.

- **Ejercicio**: Comprobar que el siguiente TRS es cuasiortogonal.

$$R_1 : or(True, x) \rightarrow True; \qquad R_2 : or(x, True) \rightarrow True;$$
$$R_3 : or(False, False) \rightarrow False$$

- **Ejercicio**: Comprobar que el siguiente TRS es débilmente ortogonal.

$$R_1 : pred(suc(x)) \rightarrow x; \qquad R_2 : suc(pred(x)) \rightarrow x;$$

Clases de Sistemas de Reescritura.

- Dado un TRS $\mathcal{R} = \langle \mathcal{F}, R \rangle$, siempre podemos establecer una partición $\mathcal{F} = \mathcal{C} \uplus \mathcal{D}$ de la signatura $\mathcal{F}$ donde:
  - $\mathcal{D} = \{f \in \mathcal{F} \mid (\exists\, l \in L(\mathcal{R})).\ \mathcal{R}oot(l) = f\}$

    [símbolos de función definidos (u operaciones)]
  - $\mathcal{C} = \mathcal{F} \setminus \mathcal{D}$

    [símbolos constructores]
- $\mathcal{T}(\mathcal{C}, \mathcal{X})$: conjunto de los términos constructores.

Clases de Sistemas de Reescritura.

- Un patrón es un término de la forma $f(\overline{d_n})$ donde $f \in \mathcal{D}$ y los argumentos $d_1, \ldots, d_n$ son términos constructores o variables.
- Una regla de reescritura $l \to r$ cumple la disciplina de constructores si l es un patrón.
- Si todas las reglas de un TRS cumplen la disciplina de constructores, se dice que es un TRS Basado en Constructores (CB).

Clases de Sistemas de Reescritura.

- **Ejemplo**: El siguiente TRS es basado en constructores.

$$R_1 : f(a, x) \to c(x); \qquad R_3 : g(c(x), y) \to g(y, a).$$
$$R_2 : f(x, b) \to b;$$

- En un TRS basado en constructores los pares críticos son siempre *overlays*.
- **Ejercicio**: Estudiar los TRSs de los ejemplos anteriores y determinar a qué clase pertenecen.

Confluencia

- La confluencia de un TRS es indecidible en el caso general.
- Es decidible para SRTs:
  - terminantes;
  - también para, SRTs (finitos) lineales por la izquierda y básicos por la derecha.

Confluencia: caracterizaciones sintácticas

- A pesar de las dificultades para establecer establecer esta propiedad, existen caracterizaciones sintácticas de la confluencia.
- Una caracterización sintáctica es la que puede establecerse mediante inspección del TRS, sin necesidad de acudir a propiedades auxiliares

Confluencia: caracterizaciones sintácticas

- Dos métodos para demostrar la confluencia son:

1. Análizar la convergencia de los pares críticos del TRS.

2. Imponer restricciones sintácticas al TRS.

Confluencia: caracterizaciones sintácticas

- **Teorema** [Huet 1980]: Un TRS es localmente confluente si y sólo si todo par crítico es convergente.

- **Ejercicio**: Comprobar que el TRS

$$f(x) \to A; \qquad g(f(x)) \to f(H(x)); \qquad g(A) \to B$$
$$f(x) \to g(f(x)); \qquad g(f(x)) \to B;$$

es localmente confluente (estudiando la convergencia de sus pares críticos).

Confluencia: caracterizaciones sintácticas

- **Teorema** [Confluencia de los TRSs terminantes – Huet 1980]: Un SRT terminante $\mathcal{R}$ es confluente si y sólo si todos sus pares críticos son convergentes.
- La confluencia local, por sí misma, no garantiza la confluencia.
- **Ejercicio**: Comprobar que el TRS de la página anterior (que no es terminante) no es confluente, aunque vimos que era localmente confluente.

Confluencia: caracterizaciones sintácticas

- Los TRS ortogonales cumplem el llamado *parallel moves lemma*, un corolario de la propiedad de los TRSs ortogonales de que los descendientes de un redex continuan siendo redexes.
- La aplicación reiterada del *parallel moves lemma* está en la base de las pruebas de muchas propiedades de los sistemas ortogonales.

Confluencia: caracterizaciones sintácticas

- **Lema** [*parallel moves lemma*]: Dado un TRS ortogonal, sean $t \to^* t_2$ y sea $t \to t_1$ una paso de reducción dado al contraer un redex s de t. Entonces, existe un reducto t_3 de t_1 y t_2, que puede encontrarse por contracción en t_2 de todos los descendientes del redex s que son mutuamente disjuntos.

Confluencia: caracterizaciones sintácticas

- Todo TRS (débilmente) ortogonal es confluente.
- La sóla condición de no ambigüedad no garantiza la confluencia.
- **Ejemplo**: El siguiente TRS es no ambiguo (¿por qué?), pero no es confluente.

$$\begin{array}{ll} f(x,x) \to a & \quad g(x) \to c(g(x)) \\ f(y,c(y)) \to b & \end{array}$$

(**Ayuda**: el término $f(g(a),g(a))$ tiene dos formas normales.)

Terminación

- Aunque la terminación es una de las propiedades más importantes de los TRSs, simplemente realizaremos unos comentarios ésta (ver Baader & Nipkow, 1998, para un tratamiento más completo).
- La propiedad de saber si un SRT es terminante es indecidible en el caso general
- Es habitual utilizar ordenes bien fundados (i.e., antirreflexivo, antisimétrico, transitivo, noetheriano) en las pruebas de terminación.

Terminación

- Aunque la terminación es una de las propiedades más importantes de los TRSs, simplemente realizaremos unos comentarios ésta (ver Baader & Nipkow, 1998, para un tratamiento más completo).
- La propiedad de saber si un SRT es terminante es indecidible en el caso general.
- Es habitual utilizar ordenes bien fundados (i.e., antirreflexivo, antisimétrico, transitivo, noetheriano) en las pruebas de terminación.

Terminación

- Un orden estricto $>$ sobre $\mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{X})$ es un orden de reescritura si:
  1. $\forall t, s, s' \in \mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{X})\ \forall p \in \mathcal{P}os(t)$, $s > s' \Rightarrow t[s]_p > t[s']_p$, y
  2. (cerrado bajo sustituciones) $\forall \sigma \in Subst(\mathcal{F},\mathcal{X})$ $\forall t, s \in \mathcal{T}(\mathcal{F},\mathcal{X})$, $t > s \Rightarrow \sigma(t) > \sigma(s)$.

- Un orden de reducción es un orden de reescritura bien fundado.

Terminación

- **Ejemplo**: El orden $>$ sobre $\mathcal{T}(\mathcal{F}, \mathcal{X})$ definido como sigue (donde $|t|$ es el número de símbolos del término t y $|t|_x$ el número de ocurrencias de x en t):

  $t > s$ si y sólo si $|t| > |s|$ y, para todo $x \in \mathcal{X}$, $|t|_x \geq |s|_x$

  es un orden de reducción.

- **Teorema**: Un TRS es terminante si y sólo si existe un orden de reducción que satisface $l > r$ para toda regla de reescritura $l \to r \in R$.

Terminación

- **Ejemplo**: Empleando el orden de reducción del Ejemplo anterior y el último Teorema, puede demostrarse la terminación del TRS:

$$
\begin{aligned}
&xor(True, False) \rightarrow True\\
&xor(False, True) \rightarrow True\\
&xor(x, x) \rightarrow False
\end{aligned}
$$