



Curso de Doctorado: Lenguajes Integrados Multiparadigma

Pascual Julián Iranzo

Pascual.Julian@uclm.es

Universidad de Castilla – La Mancha

Departamento de Informática

Ciudad Real (España)

Indice

- 1.- Introducción.
- 2.- Sistemas ecuacionales.
- 3.- Sistemas de reescritura de términos.
 - ⇒ Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.
- 5.- Taxonomía de las técnicas de implementación.
- 6.- Curry: un ejemplo de lenguaje integrado.

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación

Motivación y Objetivos

- Estudiar los principales mecanismos operacionales de los Lenguajes Lógico Funcionales:
 - **Narrowing** [= (Instanciación de variables / unificación) + Reescritura];
 - **Residuación** [= **espera** hasta que las llamadas a función estén suficientemente instanciadas + Reescritura].

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing

- Los lenguajes funcionales persiguen el **cómputo de valores de expresiones básicas**.
- Hemos visto como la reescritura sirve (**en parte**) para fundamentar los lenguajes funcionales.
- También hemos visto como la reescritura puede resolver el **(ground) word problem**.

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing

- Sin embargo, los lenguajes funcionales no están bien equipados para tratar con expresiones que contienen variables o resolver el problema de la satisfacibilidad de ecuaciones.
- **Ejemplo:** Dado el TRS

$$R_1 : 0 \leq N \rightarrow true$$

$$R_3 : s(M) \leq s(N) \rightarrow M \leq N$$

$$R_2 : s(M) \leq 0 \rightarrow false$$

$$R_4 : dec(s(X)) \rightarrow X$$

el término $s(X) \leq Y$ es irreducible.

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing

- **Ejemplo:** (continuación) El término $s(X) \leq Y$ puede reducirse a *true* si sustituimos Y por $s(N1)$ y X por 0 :

$$s(0) \leq s(N1) \rightarrow_{R_3} 0 \leq N1 \rightarrow_{R_1} \text{true}.$$

- El narrowing puede verse como un método que permite encontrar la sustitución “justa”, que aplicada a una expresión, la hace reducible.

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing

- Paso de narrowing: Un término t se reduce por *narrowing* a s , escrito $t \xrightarrow{[p,R,\sigma]} s$, si
 - existe una posición $p \in \mathcal{FP}os(t)$,
 - una (variante de una) regla $R : l \rightarrow r$
 - y una sustitución σ tal que:
 1. σ es un unificador de $t|_p$ y l), y
 2. $s \equiv \sigma(t[r]_p)$.

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing

- También escribimos $t \xrightarrow{\sigma} s$ cuando no interesen los de talles de la posición, etc. con la que damos el paso.
- Cuando σ es el unificador más general (i.e., $\sigma = mgu(\{t|_p = l\})$) hablamos de que el paso de narrowing es más general.
- Que σ no sea un unificador más general es un requisito indispensable en la definición de algunas estrategias de *narrowing* (e.g., *needed narrowing*).

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing

- **Derivación de Narrowing** de t a s : secuencia de pasos de narrowing

$$t \equiv t_0 \xrightarrow{[p_1, R_1, \sigma_1]} t_1 \xrightarrow{[p_2, R_2, \sigma_2]} \dots \xrightarrow{[p_n, R_n, \sigma_n]} t_n \equiv s$$

- **Notación:** $t \xrightarrow{\sigma}^* s$, donde $\sigma = \sigma_n \circ \dots \circ \sigma_2 \circ \sigma_1$.
- **Ejemplo:** Dado el TRS de la página 5.

$$\underline{s(X) \leq Y} \xrightarrow{[R_3, \{X/M1, Y/s(N1)\}]} \underline{M1 \leq N1} \xrightarrow{[R_1, \{M1/0, N1/N2\}]} true$$

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing

- Los programas lógico funcionales permiten tanto el cómputo de un resultado como la obtención de una respuesta.
- El par $\langle s, \sigma \rangle$ es la **salida** de la derivación. El término s es el **resultado** y σ la **respuesta** (parcial).
- **Ejemplo:** Para la anterior derivación, la salida es:
 $\langle true, \{X/0, Y/s(N2), M1/0, N1/N2\} \rangle$.

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing

- Hablaremos de **derivación de éxito** para referirnos a las derivaciones $t \xrightarrow{\sigma}^* s$ cuyo resultado s es un valor.
- Un **valor** es una forma irreducible (en particular, un término constructor —no necesariamente básico—).
- Para una derivación de éxito, $t \xrightarrow{\sigma}^* s$, $\sigma|_{Var(t)}$, es una **respuesta computada**.

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing

- **Ejemplo:** Para el ejemplo anterior, $\{X/0, Y/s(N2)\}$ es una respuesta computada.
- Hablaremos de **derivación de fallo** cuando el resultado de la derivación es una forma irreducible que no es un valor.
- **Ejemplo:**

$$s(s(X)) \leq s(dec(0)) \rightsquigarrow s(X) \leq dec(0) \not\rightsquigarrow$$

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing

- Las derivaciones de *narrowing* para un término pueden representarse mediante un árbol de búsqueda (posiblemente infinito) ramificado finitamente.
- Un **árbol de narrowing** para t en \mathcal{R} (denotado $\tau(t, \mathcal{R})$) es un conjunto de nodos que cumplen:
 1. t es el nodo raíz de τ ;
 2. Si $t \in \tau$, para todo paso de *narrowing* $t \rightsquigarrow s$
 $s \in \tau$.

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing

- **Ejercicio:** Representar el árbol de *narrowing* para el término $t \equiv s(X) \leq Y$ y el TRS de la página 5.
- Cada una de las **ramas** del árbol de *narrowing* τ representan una de las posibles derivaciones de *narrowing* a partir del término situado en la raíz.
- Las *hojas* de τ representan el resultado de la computación.

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing: el problema de la \mathcal{E} -unificación

- El *narrowing* se introdujo como un medio para resolver *ecuaciones*
- Las ecuaciones pueden manipularse como términos si ampliamos la signatura con los símbolos $\{\approx, true\}$ y suponemos que todo TRS (convergente) contiene la regla: $x \approx x \rightarrow true$
- Esta regla no destruye la confluencia y terminación del TRS ampliado.

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing: el problema de la \mathcal{E} -unificación

- la regla $x \approx x \rightarrow true$ puede entenderse como un medio de integrar la unificación sintáctica en el procedimiento de *narrowing*.
- Dado un TRS \mathcal{R} y la teoría ecuacional $\mathcal{E} = \{l = r \mid (l \rightarrow r) \in \mathcal{R}\}$, el *narrowing* es:
 - 1.- **Correcto:** Si $(s \approx t) \xrightarrow{\sigma}^* true$ es una derivación de *narrowing* entonces $\sigma(s) \approx_{\mathcal{E}} \sigma(t)$ (i.e., σ es un \mathcal{E} -unificador de s y t).

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing: el problema de la \mathcal{E} -unificación

- Dado un TRS \mathcal{R} y la teoría ecuacional $\mathcal{E} = \{l = r \mid (l \rightarrow r) \in \mathcal{R}\}$, el *narrowing* es:
 - 1.- **Correcto:** Si $\sigma(s) \approx_{\mathcal{E}} \sigma(t)$ entonces existe una derivación de *narrowing* $(s \approx t) \xrightarrow{\theta}^* true$ tal que $\theta \leq_{\mathcal{E}} \sigma [\text{Var}(s) \cup \text{Var}(t)]$.
 - 2.- **Completo:** Si $\sigma(s) \approx_{\mathcal{E}} \sigma(t)$ entonces existe una derivación de *narrowing* $(s \approx t) \xrightarrow{\theta}^* true$ tal que $\theta \leq_{\mathcal{E}} \sigma [\text{Var}(s) \cup \text{Var}(t)]$.
- **Observación:** Bajo la condiciones para la corrección y completitud del *narrowing*, σ es una solución de una ecuación si y sólo si $(s \approx t) \xrightarrow{\sigma}^* true$.

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing: el problema de la \mathcal{E} -unificación

- En general el *narrowing* es correcto, sin embargo, para lograr la completitud deben imponerse ciertas restricciones, tanto a los TRS's como al tipo de resultados y respuestas obtenidos.
- En la prueba de la corrección es clave la observación de que: $t \xrightarrow{\sigma} s \Rightarrow \sigma(t) \rightarrow s$.
- El *narrowing* es completo para TRSs convergentes.

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing: el problema de la \mathcal{E} -unificación

- En la prueba de la completitud se emplea el siguiente **Lema de *lifting***:
 - s y t , términos
 - θ una sustitución normalizada y $t = \theta(s)$.
 - $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$, tal que $\text{Var}(s) \cup \text{Dom}(\theta) \subseteq \mathcal{V}$

Si $t \rightarrow^* t'$ entonces, existe un s' y una θ' , tal que

- $s \xrightarrow{\sigma}^* s'$,
- $t' = \theta'(s')$, $\theta' \circ \sigma = \theta$ y θ' está normalizada.

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing: el problema de la \mathcal{E} -unificación

- **Observación:** θ es una **sustitución normalizada** sii $\forall x \in \text{Dom}(\theta), \theta(x)$ está en forma normal.
- El *narrowing* es completo para TRSs confluentes y sustituciones normalizadas.
- También, para sustituciones normalizadas, podemos eliminar el subíndice “ \mathcal{E} ” del orden “ $\leq_{\mathcal{E}}$ ” y emplear el preorden de máxima generalidad “ \leq ” en la definición de completitud.

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Estrategias de Narrowing

- En general, el procedimiento de *narrowing* es **indeterminista**, debido a la existencia de dos grados de libertad:
 - la elección del subtérmino a reducir y
 - la elección de la regla.
- Esto conduce a un espacio de búsqueda demasiado amplio (que **debe ser recorrido en toda su amplitud para mantener la completitud** del cálculo).

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Estrategias de Narrowing

- Una estrategia de *narrowing* es una restricción del espacio de búsqueda.
- Una **estrategia de narrowing** es una aplicación φ que, para un término t , computa el conjunto de ternas $\langle p, R, \sigma \rangle$, donde
 - $p \in \mathcal{FP}os(t)$,
 - $R \equiv (l \rightarrow r)$ es la regla del TRS utilizada para dar el paso de *narrowing* y
 - σ una substitución unificadora de $t|_p$ y l

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Estrategias de Narrowing

- $t \xrightarrow{\varphi}^{[p,R,\sigma]} \sigma(t[r]_p)$ es un **paso de narrowing que respeta la estrategia φ** , si $\langle p, R, \sigma \rangle \in \varphi(t)$.
- Si el conjunto $\varphi(t)$ contiene un solo elemento, decimos que el paso de *narrowing* es **determinista**.
- Una **derivación respeta la estrategia φ** , y escribimos $t \xrightarrow{\varphi}^{\sigma} s$, si cada uno de sus pasos es un paso de *narrowing* que respeta la estrategia φ .

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Estrategias de Narrowing

- Se han diseñado muchas estrategias para reducir el tamaño del espacio de búsqueda, eliminando algunas derivaciones inútiles.
- Una propiedad importante de toda estrategia es que siga manteniendo la completitud del cálculo.
- Una clasificación de las diferentes estrategias y las condiciones para que sea correcta y completa, puede encontrarse en [Hanus 1994].

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Estrategias de evaluación perezosa

- Nos centraremos en las **estrategias de evaluación perezosa**. Principalmente:
 - *narrowing perezoso* (**lazy narrowing** — LN) y
 - *narrowing necesario* (**needed narrowing** — NN).
- En este contexto,
 - programa = subclase de los **TRSs CB y lineales por la izquierda** y
 - la igualdad es una forma más débil de identidad (**igualdad estricta**).

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Expresividad e igualdad estricta

- Antes de seguir adelante conviene precisar ciertos aspectos sintácticos y el concepto de igualdad estricta.
- Con el fin de aumentar la expresividad del lenguaje, extendemos la signatura \mathcal{F} con un conjunto de **símbolos de función primitivos**:
 $\mathcal{P} = \{\approx, \wedge, \Rightarrow\}$.
- Esto permite manipular expresiones complejas (e.g., ecuaciones) como términos.

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Expresividad e igualdad estricta

- La semántica de estos símbolos primitivos viene determinada por el siguiente conjunto de reglas predefinidas, que denotamos por STREQ:

$$c \approx c \rightarrow \text{true} \quad \% c \in \mathcal{C}, ar(c) = 0$$

$$c(\overline{x_n}) \approx c(\overline{y_n}) \rightarrow (x_1 \approx y_1) \wedge \dots \wedge (x_n \approx y_n) \quad \% c \in \mathcal{C}, ar(c) = n$$

$$\text{true} \wedge x \rightarrow x$$

$$\text{false} \wedge x \rightarrow \text{false}$$

$$(\text{true} \Rightarrow x) \rightarrow x$$

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Expresividad e igualdad estricta

- Observaciones:
 - El operador \wedge es el operador booleano de **conjunción**.
 - El operador \Rightarrow permite construir **expresiones condicionales guardadas** (*boolean* $\Rightarrow t$). No tiene correspondencia exacta con el condicional lógico.
 - Las dos primeras reglas definen la validez de una ecuación como la **igualdad estricta** entre términos.

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Expresividad e igualdad estricta

- La **igualdad estricta** define dos términos s y t como idénticos sii tienen como forma normal el mismo término constructor (básico).
 - **Proposición:** $s \approx t$ sii $s \approx t$ se reduce a *true*.
- Es habitual definir la igualdad estricta en los lenguajes (funcionales) que permiten manipular cómputos que no terminan.

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Expresividad e igualdad estricta

- La igualdad estricta no es una verdadera relación de identidad, ya que no posee la propiedad reflexiva.
 - **Ejemplo:** Para $\mathcal{R} = \{f(X) \rightarrow f(X)\}$, la evaluación de $f(0) \approx f(0)$ no termina.
- En lo que sigue supondremos que todo programa \mathcal{R} se extiende con el conjunto de reglas STREQ. Las reglas STREQ son ortogonales.

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing Perezoso

- El *narrowing perezoso* reduce las expresiones comenzando por las posiciones más externas (“outermost”) sobre las que se puede dar un paso de *narrowing*.
- Los pasos de *narrowing* sobre posiciones más internas solamente se realizan si son demandados y contribuyen a un paso de *narrowing* posterior sobre una posición más externa.

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing Perezoso

- LN se fundamenta sobre un mecanismo de **unificación lineal**.
- El algoritmo de unificación lineal difiere con respecto al algoritmo de unificación sintáctica estándar en que:
 - una colisión entre un símbolo constructor y uno de operación, no se ve como un fracaso, sino como una demanda de una mayor evaluación de f .

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing Perezoso

- LN se fundamenta sobre un mecanismo de **unificación lineal**.
- El algoritmo de unificación lineal difiere con respecto al algoritmo de unificación sintáctica estándar en que:
 - Debido a la linealidad de los patrones que aparecen en las lhs's, no se precisa de ningún mecanismo de "occur-check".

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing Perezoso

- Un **problema de unificación lineal** es un par de términos: $\langle f(\overline{d}_n), f(\overline{t}_n) \rangle$; donde $f(\overline{d}_n)$ es un patrón lineal que no comparte variables con $f(\overline{t}_n)$.
- Una **configuración LU** es un par (U, σ) , donde U es un conjunto $\{d_1 \downarrow_1 t_1, \dots, d_n \downarrow_n t_n\}$, siendo d_1, \dots, d_n términos constructores lineales que no comparten variables y σ una substitución.

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing Perezoso: Relación de Unificación \rightarrow_{LU}

- La mínima relación que satisface:

1. $(\{c(\overline{d_m}) \downarrow_u c(\overline{t_m})\} \cup U, \sigma) \rightarrow_{\text{LU}} (\{\overline{d_m \downarrow_{u.m} t_m}\} \cup U, \sigma)$,
donde $(c/m) \in \mathcal{C}, m \geq 0$.

2. $(\{x \downarrow_u t\} \cup U, \sigma) \rightarrow_{\text{LU}} (\{x/t\}(U), \{x/t\} \circ \sigma)$, donde $t \notin \text{dom}(\sigma)$.

3. $(\{d \downarrow_u x\} \cup U, \sigma) \rightarrow_{\text{LU}} (\{x/d\}(U), \{x/d\} \circ \sigma)$.

4. $(\{c(\overline{d_m}) \downarrow_u c'(\overline{t_p})\} \cup U, \sigma) \rightarrow_{\text{LU}} (\{\text{fail}\}, \sigma)$,
donde $(c/m), (c'/p) \in \mathcal{C}, c \neq c', \text{ y } m, p \geq 0$.

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing Perezoso: Relación de Unificación \rightarrow_{LU}

- Dada una configuración (U, σ) irreducible, una posición u es **demandada**, si $(c(\overline{d_m}) \downarrow_u g(\overline{t_p})) \in U$.
- Sea $\Gamma \equiv \langle f(\overline{d_n}), f(\overline{t_n}) \rangle$ un problema de unificación lineal y $(U_0, \sigma_0) \equiv (\{\overline{d_n} \downarrow_n \overline{t_n}\}, id) \rightarrow_{LU}^* (U, \sigma) \not\rightarrow_{LU}$.

$$LU(\Gamma) = \begin{cases} (\text{SUCC}, \sigma) & \text{si } U = \emptyset \\ (\text{FAIL}, \emptyset) & \text{si } U = \{\text{fail}\} \\ (\text{DEMAND}, P) & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

P = conjunto de posiciones demandadas.

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing Perezoso

- Estrategia de Narrowing Perezoso λ_{lazy} :

$$\lambda_{lazy}(t) = \bigcup_{k=1}^m \lambda_{-}(t, \Lambda, R_k)$$

$\lambda_{-}(t, p, R_k) =$ si $\mathcal{R}oot(l_k) \equiv \mathcal{R}oot(t|_p)$ entonces

en caso de que $\text{LU}(\langle l_k, t|_p \rangle) =$

$$\begin{cases} (\text{Succ}, \sigma) : & \{ \langle p, R_k, \sigma \rangle \} \\ (\text{Fail}, \emptyset) : & \emptyset \\ (\text{Demand}, P) : & \bigcup_{q \in P} \bigcup_{k=1}^m \lambda_{-}(t, p.q, R_k) \end{cases}$$

sino \emptyset

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing Perezoso

- Informalmente, la estrategia $\lambda_{lazy}(t)$ consiste en:
 1. Seleccionar una posición más externa p de redex para t .
 2. Si el proceso de unificación lineal de $t|_p$ con una lhs de una regla tiene éxito, entonces dar el paso de narrowing.
 3. Si produce un conjunto de posiciones demandadas P , entonces hallar $\lambda_{lazy}(t|_u)$ para todo $u \in P$.
 4. en otro caso, se produce un fallo.

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing Perezoso

- **Ejercicio:** Dado el TRS

$$\begin{array}{ll} 0 \leq N & \rightarrow \text{true} \\ s(M) \leq 0 & \rightarrow \text{false} \\ s(M) \leq s(N) & \rightarrow M \leq N \end{array} \qquad \begin{array}{ll} 0 + N & \rightarrow N \\ s(M) + N & \rightarrow s(M + N) \end{array}$$

Construir el árbol de narrowing perezoso para el término $X \leq X + X$:

- Señalar las derivaciones de éxito.
- Indicar las respuestas y valores computados.

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing Perezoso: Propiedades

- **Proposition:** Sea $s \rightsquigarrow_{LN}^{\sigma} t$, una derivación. Entonces, para toda $x, z \in Dom(\sigma|_{Var(s)})$, con $x \neq z$, se cumple que $\sigma(x)$ y $\sigma(z)$:
 - son términos constructores lineales, y
 - no comparten variables.
- **Teorema:** El *narrowing* perezoso es **completo** con respecto a la igualdad estricta y sustituciones constructoras, para programas CB ortogonales.

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing Perezoso: Problemas

- El ejercicio de la página 39 revela que, dado un término, **LN puede dar pasos sobre diferentes redexes demandados por diferentes reglas.**
- Esto puede causar:
 - dificultades en una implementación secuencial que use *backtracking*.
 - computaciones innecesarias.

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing Perezoso: Problemas

- Una implementación secuencial debe gestionar:
 - Los puntos de vuelta atrás asociados a la existencia de diversos redexes.
 - Los puntos de vuelta atrás asociados a la elección de diferentes reglas (habituales en programación lógica).
- Los **programas uniformes** se introdujeron para intentar eliminar la aparición de diversos redexes. (ver [Julián 2000 — Cap. 5] para una introducción).

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing Perezoso: Problemas

- El siguiente ejemplo ilustra el problema de los cálculos innecesarios y las derivaciones redundantes.
- **Ejemplo:** Dado el TRS de la página 39 son posibles las siguientes derivaciones que computan la misma salida:

- $$\underline{X \leq X + X} \xrightarrow{[R_1, \{X/0\}]_{LN}} true$$

- $$\underline{X \leq X + X} \xrightarrow{[R_4, \{X/0\}]_{LN}} \underline{0 \leq 0} \xrightarrow{[R_1, \{\}]_{LN}} true$$

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing Perezoso: Problemas

- La segunda derivación reduce una posición de redex (la 2), que no es necesario reducir.
- El *narrowing* necesario se introdujo para resolver este problema.
- El **narrowing necesario** se basa en la selección de las posiciones necesarias más externas de un término, de modo que solamente se dan pasos inevitables para el cómputo de un resultado.

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing Necesario: Arboles definicionales

- NN se define para la clase de los programas **inductivamente secuenciales**.
 - Son un **subconjunto** de los programas **CB** y **ortogonales**.
 - Coinciden con la clase de los TRSs **CB** y **fuertemente secuenciales**
- Su definición precisa se basa en el concepto de árbol definicional.

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing Necesario: Árboles definicionales

- Dado un TRS \mathcal{R} , \mathcal{P} es un **árbol definicional parcial** con patrón π sii:
 1. $\mathcal{P} = rule(\pi, l \rightarrow r)$, donde $(l \rightarrow r) \in \mathcal{R}$ y π es una variante de l .
 2. $\mathcal{P} = branch(\pi, o, \overline{\mathcal{P}_k})$, donde o es una posición de variable de π , para $k > 0$, $\overline{c_k}$ son constructores distintos y \mathcal{P}_i es un árbol definicional parcial con patrón $\pi[c_i(\overline{x_n})]_o$, donde $\overline{x_n}$ son variables nuevas.

Narrowing, estrategias de narrowing y residuación.

Narrowing Necesario: Arboles definicionales

- Si f es una función definida, \mathcal{P} es un **árbol definicional de f** , sii es un árbol definicional parcial con $pattern(\mathcal{P}) = f(\overline{x_n})$, donde $\overline{x_n}$ son variables distintas.
- **Representación gráfica:**